



Aula 02

Probabilidades

Samuel Oliveira

A TEORIA DAS PROBABILIDADES

O estudo das probabilidades foi motivado inicialmente pelos jogos, encontrando mais tarde aplicações em outros campos, como a genética, a medicina, a economia, a política e outros setores da atividade humana em que há necessidade de prever a ocorrência de determinado fato.

Os primeiros estudos devem-se ao matemático francês Blaise Pascal (1623 – 1662). Ao viajar com um jogador, viu-se diante de um problema sobre jogo de dados. Após estudá-lo, escreveu sobre suas conclusões ao colega francês Pierre de Fermat (1601 – 1665). As análises que ambos elaboraram a partir desse problema deram início ao que chamamos de ***teoria das probabilidades***.

Elementos do estudo das probabilidades

EXPERIMENTO ALEATÓRIO

Consideramos experimentos aleatórios os fenômenos que apresentam resultados imprevisíveis quando repetidos, mesmo que as condições sejam semelhantes.

Exemplos:

- a) Lançar duas moedas e observar as faces voltadas para cima.*
- b) Retirar uma carta de um baralho e observar o naipe.*
- c) Abrir um livro ao acaso e depois observar o número da página.*

ESPAÇO AMOSTRAL

É o conjunto de todos os resultados possíveis de ocorrer num experimento aleatório equiprovável.

Exemplos:

- a) No lançamento de um dado comum de seis faces numeradas de 1 a 6, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $n(U) = 6$.
- b) No lançamento de uma moeda, $U = \{ \text{cara, coroa} \}$ e $n(U) = 2$.
- b) No lançamento de duas moedas, $U = \{(\text{cara, cara}), (\text{cara, coroa}), (\text{coroa, cara}), (\text{coroa, coroa})\}$ e $n(U) = 4$.

EVENTO

É qualquer subconjunto de um espaço amostral U .

Exemplos:

a) No lançamento de duas moedas:

Evento (E): aparecerem faces iguais.

$E = \{(c, c), (k, k)\}$. Portanto, $n(E) = 2$.

b) No lançamento simultâneo de dois dados comuns:

Evento (E): o número do primeiro dado é o dobro do número do segundo dado.

$E = \{(2, 1), (4, 2), (6, 3)\}$. Portanto, $n(E) = 3$.

PROBABILIDADE

Considerando um espaço amostral U , não-vazio, e um evento E , sendo $E \subset U$, a probabilidade de ocorrer o evento E é o número real $P(E)$, tal que:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(U)} \quad \textbf{Consequência da definição:}$$
$$0 \leq P(E) \leq 1 \quad \text{ou} \quad 0\% \leq P(E) \leq 100\%$$

Exemplos:

- 1) Escolhido ao acaso um elemento do conjunto dos divisores naturais de 30, determinar a probabilidade de que ele seja primo.
- 2) Um casal planeja ter 3 filhos. Qual a probabilidade de os 3 serem do mesmo sexo?

Resoluções:

1) Espaço amostral: $n(U) = 8$ $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

Evento: $n(E) = 3$ $\{2, 3, 5\}$

$$P(E) = n(E)/n(U)$$

$$***P(E) = 3/8***$$

2) Masculino: M e Feminino: F

$U = \{(MMM), (MMF), (MFM), (MFF), (FFF), (FFM), (FMF), (FMM)\}$

$$n(U) = 8$$

$E = \{(MMM), (FFF)\}$

$$n(E) = 2$$

$$***P(E) = 2/8 = 1/4 \text{ ou } 25\%***$$

3) Qual a probabilidade de ocorrer soma 10 no lançamento de dois dados comuns?

(1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (1,5) (1,6)
(2,1) (2,2) (2,3) (2,4) (2,5) (2,6)
(3,1) (3,2) (3,3) (3,4) (3,5) (3,6)
(4,1) (4,2) (4,3) (4,4) (4,5) (4,6)
(5,1) (5,2) (5,3) (5,4) (5,5) (5,6)
(6,1) (6,2) (6,3) (6,4) (6,5) (6,6)

4) No lançamento simultâneo de dois dados comuns, calcular a probabilidade de obtermos soma diferente de 11.

5) No lançamento de um dado comum, verificou-se que foi obtida face com número maior que 2. Qual é a probabilidade de esse número ser primo?

Resoluções:

3) $n(U) = 36$

$$n(E) = 3 \{(4,6); (5, 5); (6, 4)\}$$

$$***P(E) = 3/36 = 1/12***$$

4) $n(U) = 36$

$$\text{soma igual a 11: } 2 \{(6, 5); (5, 6)\}$$

$$\text{soma diferente de 11: } 36 - 2 = 34$$

$$n(E) = 34$$

$$***P(E) = 34/36 = 17/18***$$

5) $n(U) = 4 \{3, 4, 5, 6\}$

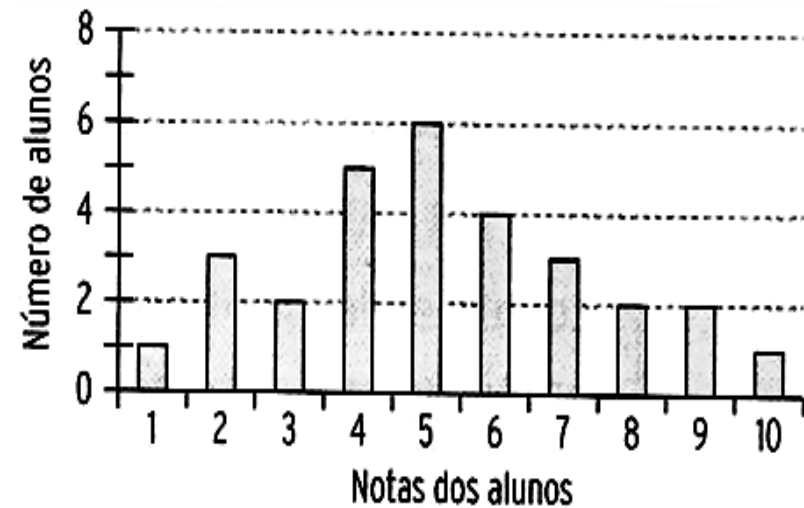
$$n(E) = 2 \{3, 5\}$$

$$***P(E) = 2/4 = 1/2 \text{ ou } 50\%***$$

6) Uma urna contém 40 bolas numeradas de 01 a 40. Uma delas será sorteada ao acaso. Qual a probabilidade de sair um múltiplo de 6?

7) As notas de um teste aplicado a um grupo de alunos estão descritas no gráfico ao lado.

Com base nesse gráfico, qual é a probabilidade de um escolhido ao acaso ter obtido uma nota superior a 6?



Resoluções:

$$6) n(U) = 40$$

$$n(E) = 6 \{6, 12, 18, 24, 30, 36\}$$

$$***P(E) = 6/40 = 3/20 ou 15%***$$

$$7) \text{ Total de alunos: } 29 \{1+3+2+5+6+4+3+2+2+1\}$$

$$n(U) = 29$$

Numero de alunos com notas superiores a 6: 8

$$n(E) = 8$$

$$***P(E) = 8/29***$$

08) Para se ter ideia do perfil dos candidatos ao curso de odontologia em um vestibular, 600 estudantes candidatos a esse curso foram selecionados ao acaso e entrevistados, sendo que, entre esses, 260 eram homens. Descobriu-se que 140 desses homens e 100 das mulheres entrevistadas já estavam cursando o ensino superior em outra instituição. Se um dos 600 estudantes entrevistados for selecionado ao acaso, a probabilidade de ele ser uma mulher que, no momento da entrevista, não estava cursando o ensino superior é igual a:

- a) 0,12 b) 0,57 c) 0,40 d) 0,70 e) 0,42

09) Numa brincadeira, um dado, com faces numeradas de 1 a 6, será lançado por Cristiano e, depois, por Ronaldo. Será considerado vencedor aquele que obtiver o maior número como resultado do lançamento. Se, nos dois lançamentos, for obtido o mesmo resultado, ocorrerá empate.

Com base nessas informações:

1. Calcule a probabilidade de ocorrer um empate.
2. Calcule a probabilidade de Cristiano ser o vencedor.

Resoluções:

8) Distribuição dos dados:

	Cursando ensino superior	Não cursando o ensino superior	Total
Homens	140	120	260
Mulheres	100	240	340
Total	240	360	600

$$n(U) = 600$$

$$n(E) = 240$$

$$***P(E) = 240/600 = 2/5 ou 40%***$$

Resoluções:

Possibilidades para o lançamento do dado:

Cristiano: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; Ronaldo: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5); (1, 6)$

$(2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (2, 5); (2, 6)$

$(3, 1); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (3, 5); (3, 6)$

$(4, 1); (4, 2); (4, 3); (4, 4); (4, 5); (4, 6)$

$(5, 1); (5, 2); (5, 3); (5, 4); (5, 5); (5, 6)$

$(6, 1); (6, 2); (6, 3); (6, 4); (6, 5); (6, 6)$ $n(U) = 36$

9) Ocorrer empate: $P(E) = 6/36 = 1/6$ {valores iguais}

10) Cristiano vencer: $P(E) = 15/36 = 5/12$

Probabilidades de experimentos não equiprováveis

1) Em uma moeda viciada, a chance de ocorrer cara em um lançamento é o dobro de chances de ocorrer coroa. Calcule a probabilidade de ocorrer cara num lançamento dessa moeda.

Probabilidades de experimentos não equiprováveis

2) Consideremos um dado que em três das faces tenha o número 1, em duas faces o número 2 e na outra o número 3. Lança-se esse dado e observa-se o número da face superior. Qual a probabilidade de se obter um número ímpar?

Probabilidades de experimentos não equiprováveis

3) Três carros A, B e C participam de uma corrida. A tem duas vezes mais chances de ganhar que B, e B tem três vezes mais chances de ganhar que C. Determine a probabilidade de vitória de cada carro.

Probabilidades de experimentos não equiprováveis

4) Um saco contém 12 bolas verdes e 8 bolas amarelas. Quantas bolas azuis devem ser colocadas no saco, de modo que a probabilidade de retirarmos do mesmo, aleatoriamente, uma bola azul seja $\frac{2}{3}$?

Probabilidade de não ocorrer um evento

A probabilidade de não ocorrer um evento é igual a 1 menos a probabilidade de que ele ocorra.

Notação: $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$

Observações:

I – *Eventos mutuamente exclusivos:*

$$E_1 \cap E_2 = \emptyset$$

II – *Eventos complementares:*

$$E_1 \cap E_2 = \emptyset \text{ e } E_1 \cup E_2 = U \text{ (espaço amostral)}$$

Exemplo:

Uma urna contém 6 bolas verdes, 5 azuis e 4 pretas. Calcule a probabilidade de se extrair:

- a) uma bola preta.
- b) uma bola que não seja verde.

União de eventos

Numa pesquisa de preferência em relação a dois jornais, foram consultadas 470 pessoas e o resultado foi o seguinte: 250 delas lêem o jornal A, 180 lêem o jornal B e 60 lêem os jornais A e B. Escolhendo um dos entrevistados ao acaso, qual a probabilidade de que ele seja:

- a) Leitor dos jornais A e B?
- b) Leitor do jornal A ou do jornal B?
- c) Não seja leitor do jornal A?

União de eventos

Se **A** e **B** são dois eventos de um espaço amostral **U**, então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Exemplos:

- 1) Sorteando um número de 1 a 30, qual a probabilidade de que ele seja par ou múltiplo de 3?

2) De uma reunião participaram 200 profissionais, sendo 60 médicos, 50 dentistas, 32 enfermeiras e os demais nutricionistas. Escolhido ao acaso um elemento do grupo, qual é a probabilidade de ele ser médico ou dentista?

Probabilidade Condicional

(Unesp – SP) João lança um dado sem que Antônio veja. João diz que o número mostrado pelo dado é par. A probabilidade de Antônio descobrir esse número é:

- a) $1/2$
- b) $1/6$
- c) $2/3$
- d) $1/3$
- e) $1/12$

Probabilidade Condicional

Definição:

Considerando os eventos A e B de um espaço amostral $\mathbf{U}$, define-se como probabilidade condicional do evento A , tendo ocorrido B e indicado por $P(A/B)$, a razão:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{ou} \quad P(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

Exemplos:

01) Um programa de televisão é realizado em um auditório de 400 cadeiras, numeradas de 1 a 400. Durante o programa, o apresentador sorteou um desses números e, para criar suspense, disse: "O número é menor que 100". Qual é a probabilidade de que o número sorteado tenha sido múltiplo de 10?

2) Escolhe-se, ao acaso, um número do conjunto $\{x \in \mathbb{N} / 1 \leq x \leq 100\}$. Sabendo-se que o número escolhido é quadrado perfeito, qual é a probabilidade de ele ser par?

Multiplicação de Probabilidades (Eventos Independentes)

Se um evento **A** tem probabilidade **p** e, em seguida, ocorre o evento **B** de probabilidade **q** , então a probabilidade de que ocorram os eventos **A** e **B** na ordem indicada é **$p \cdot q$** .

Exemplos:

- 1) Determinar a probabilidade de sair o número 5 em dois lançamentos sucessivos de um dado.

2) Numa caixa estão guardados 20 livros, sendo 12 de Biologia e 8 de Geografia. Dois deles são retirados sucessivamente e sem reposição. Qual é a probabilidade de terem sido escolhidos 2 livros de Biologia?

3) Uma urna contém 6 bolas vermelhas e 4 bolas brancas. Retirando-se, sucessivamente, 2 bolas, calcule a probabilidade de:

a) ambas serem vermelhas.

b) ambas serem brancas.

4) Na prateleira de um supermercado há 20 latas de achocolatado, das quais 4 estão além do prazo de validade. Uma mulher passa e apanha uma delas ao acaso; logo em seguida, um rapaz apanha outra lata ao acaso. Qual é a probabilidade de que:

- a) Ambos tenham comprado achocolatados com prazo dentro da validade?
- b) A mulher tenha comprado o produto com prazo dentro da validade, mas o rapaz não?